

3) Найти число и вектор Фробениуса - Перрона матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Является ли эта матрица а) продуктивной; б) неразложимой; в) устойчивой?

Найдем число Ф.-П.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1/4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1/4-\lambda) - 4(1/4-\lambda) =$$

$$= (1/4 - \lambda) [(2-\lambda)^2 - 4]$$

$$(1/4 - \lambda) [(2-\lambda)^2 - 4] = 0 \Rightarrow 1) \frac{1}{4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1/4$$

$$2) (2-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 4$$

$$\text{Т.о.: } \lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$$

Число Ф.-П. - наибольшее из с.з. Т.о.: $\lambda(A) = 4$

Найдем вектор Ф.-П.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 4x \\ 1/4 y = 4y \\ 2x + 2z = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 0 \\ -15y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, d > 0$$

Так как $\lambda(A) > 1 \Rightarrow$ то матрица является непродуктивной

Опр. М-ца A разлосимая, если $\exists$ собств. подматрица $N = \{1, \dots, n\}$ номеров строк:

$$a_{ij} = 0 \quad i \notin J, j \in J$$

Возьмем $J = \{1, 3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$. Являются ли эл-ты

$a_{21}, a_{23} = 0$? Да $\Rightarrow$ м-ца A разлосимая $\Rightarrow$ **В) нет** ✓

Опр. Матрица A явл-я устойчивой, если $\exists k \geq 0: A^k > 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1/16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1/16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1/64 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ "0" остаются на поз-х $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$

$\Rightarrow \nexists k \geq 0: A^k > 0 \Rightarrow$ **В) нет** ✓ разлосима $\Rightarrow$ неуст.

④

$\exists A \geq 0 (n \times n)$ матрица и $(E+A)^n - E > A$. Верно ли что м-ца A неразлосима? зачем

$$(E+A)^n > E+A \quad | : (E+A) \Rightarrow (E+A)^{n-1} > 0$$

Т.к. $A \geq 0 \Rightarrow a_{ij} \geq 0 \Rightarrow b_{ij} \geq 0$, т.к. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и диа-е эл-ты

м-цы ув-ся на 1, все ост-е не меняются $\Rightarrow$ м-ца неразл-ма, т.к. $\nexists k \in \mathbb{N} (a_{ij})^k > 0$ (непр-но, возьмем элемент "0", это уже не будет вкл-ся $0^k = 0 \forall k$)

5) Построить двойственную задачу к задаче III:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 \geq 9$$

$$-x_2 + 3x_4 - 7x_3 \leq 8$$

$$4x_1 + 8x_4 - 7x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0$$

Система ограничений прямой задачи состоит из 3-х стр-и $\Rightarrow$ в двойств. з-е будут 3 пер-е: y_1, y_2, y_3 .
Приведем систему ограничений к стандартному виду (в нашей задаче на max: " $\leq$ ", " $=$ " и " $\geq$ "):

$$-4x_1 - 5x_2 + 6x_4 + 8x_3 \leq -9$$

$$-x_2 + 3x_4 + 7x_3 \leq 8$$

$$4x_1 + 8x_4 - 7x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 \leq 0, (-x_3) \leq 0, x_4 \leq 0 \quad x_1 \leq 0, x_3 \leq 0, x_4 \leq 0$$

Важно! В стандартном виде не должно быть x_3 ! надо!

Матрица коэф-в: $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & -7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Матрица коэф-в для дв-й з.: $B = A^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -7 \\ -8 & -7 & 3 \\ +6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Если $x_i \geq 0$, то i -е усл-е с-и стр-и дв. з-и — нерав-во.

Если $x_i \leq 0$, то i -е усл-е с-и стр-и дв. з-и — рав-во.

Если j -е стр-е прав. з-и — нерав-во, то $y_j \geq 0$

Если j -е стр-е прав. з-и — рав-во, то $y_j \leq 0$

Целевая ф-я двойств. з-и: $9y_1 + 8y_2 + 10y_3 \rightarrow \min$

Система ограничений:

$$-4y_1 + 4y_3 \leq 1 \quad \text{в ф-и, где max смотреть коэф-ты}$$

$$-5y_1 - 2y_2 - 7y_3 = 0$$

$$8y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 2$$

$$6y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 3$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Итого:

$$\begin{cases} -9y_1 + 8y_2 + 10y_3 \rightarrow \min \\ -4y_1 + 4y_3 \leq 1 \\ -5y_1 - 2y_2 - 7y_3 = 0 \\ 8y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 2 \\ 6y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

6) При каких значениях параметра a будет равновесие по Нэшу?

$(4, 6)$	$(1, 3)$	$(0, 7)$
$(5, 4)$	$(7, 0)$	$(2, 3)$
$(3, 2)$	$(4, 5)$	$(3, 4)$

3) Рассмотрим модель Курно с 2-мя произв-и и линейными ф-и издержек $C_1(x) = C_2(x) = x^3$ и обратной ф-и спроса $P(x) = 1 - x$. Цена равна цене в этой модели Курно? Какое значение примет цена, если произв-и объединятся в монополию?

тут $x = x_1 + x_2$
Вычислим прибыли олигополистов:

$$\Pi_1 = TR_1 - TC_1 = R_1(x) - C_1(x) = P(x) \cdot x_1 - x_1^3 = (1 - x_2)x_1 - x_1^3 = x_1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_1^3$$

$$\Pi_2 = TR_2 - TC_2 = R_2(x) - C_2(x) = P(x) \cdot x_2 - x_2^3 = (1 - x_1)x_2 - x_2^3 = x_2 - x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^3$$

Фирма стремится к макс прибыли. Найдем макс ф-и прибыли:

$$\Pi'_1 = 1 - 2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0$$

$$\Pi'_2 = 1 - 2x_2 - 3x_2^2 - x_1 = 0$$

Цена равновесия:

$$P(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{!}$$

Прибыли каждой фирм по отдельности:

$$\Pi_1 = \frac{2}{3}x - x^3 \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{2}{9} - \frac{1}{27} = \frac{5}{27}$$

$$\Pi_2 = \frac{2}{3}x - x^3 \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{5}{27}$$

Если обе фирмы объединятся в монополию, то общая прибыль: как функции x_1, x_2

$$\Pi_{\text{оф}} = TR_{\text{оф}} - TC_{\text{оф}} = (1 - x)x^3 - x^3$$

$$\Pi_{\text{оф}} = -x^3 + (1 - x)3x^2 - 3x^2 = -x^3 - 3x^3 = -4x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$P = 1 - 0 = 1 \quad \text{!}$$

Прибыль монополии:

$$\Pi_{\text{оф}} = (1 - 0)0^3 - 0^3 = 0$$

8) Рассмотрим модель Курно с 2-мя произв-ли и идентичными ф-и издержек $c_1(x) = c_2(x) = x^2$ и обратной ф-и спроса $P(x) = 1 - x$. чему равна цена в этой модели Курно? какое значение

Выведем прибыль:

$$\Pi_1 = TR_1 - TC_1 = R_1(x) - C_1(x) = P(x) \cdot x - x^2 = (1-x)x - x^2 = x - x^2 - x^2 = x - 2x^2$$

$$\Pi_2 = TR_2 - TC_2 = R_2(x) - C_2(x) = P(x) \cdot x - x^2 = (1-x)x - x^2 = x - x^2 - x^2 = x - 2x^2$$

Фирма стремится к макс прибыли. Найдем макс ф-и прибыли:

$$\Pi_1' = 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1/4$$

$$\Pi_2' = 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1/4$$

Цена равновесия:

$$P(x) = 1 - 1/4 = 3/4 !$$

Прибыль каждой фирмы по отг-и:

$$\Pi_1 = \frac{3}{4}x - x^2 \Big|_{x=1/4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Если фирмы объединяются в монополию, то общая прибыль:

$$\Pi_{об} = TR_{об} - TC_{об} = (1-x)x^2 - x^2 = x^2 - x^3 - x^2$$

$$\Pi_{об}' = -3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$P = 1 - 0 = 1 !$$

Прибыль монополии:

$$\Pi_{об} = (1-0)0^2 - 0^2 = 0$$

1) Рассмотрим модель чистого обмена с 2^{ми} видами товаров и 2^{ми} потребителями. И нач-е запасы 1^{го} потр-я (1, 2), и ф-я полезности $\sqrt{x_1(x_2)^2}$. Пусть начальное запасы 2^{го} потребителя (3, 4) и ф-я полезности $\sqrt{x_1}x_2$. Найти относительные равновесные цены на 1^{ый} и 2^{ой} товар.

А

Глава 5 Экономическая интерпретация двойственности

§1. Двойственность в задачах ЛП

$$\vec{c}\vec{x} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$A\vec{x} \leq \vec{b} \quad (2)$$

Здесь $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, A - матрица $(m \times n)$

Теорема двойственности

Задача ЛП (1)-(2) имеет решение $\Leftrightarrow$ когда имеет решение ЗЛП:

$$\vec{b}\vec{u} \rightarrow \min \quad (3)$$

$$A^*\vec{u} = \vec{c} \quad (4)$$

$$\vec{u} \geq 0 \quad (5)$$

Притом, если ЗЛП (1)-(2) и (3)-(5) имеют р-я, то оптимальные значения функционалов в этих задачах равны

Задача ЛП со смешанными ограничениями

$$\vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 \rightarrow \max \quad (6)$$

$$A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 \leq \vec{b}_1 \quad (7)$$

$$A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 \leq \vec{b}_2 \quad (8)$$

$$\vec{x}_1 \geq 0 \quad (9)$$

Здесь $\vec{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\vec{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\vec{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\vec{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

A_{11} - матрица $(m_1 \times n_1)$, A_{12} - $(m_1 \times n_2)$, A_{21} - $(m_2 \times n_1)$, A_{22} - $(m_2 \times n_2)$

Задача (1) - (2) - ч.с. (6) - (9)

P.S. $A_{21} = 0$, $A_{22} = 0$, $\vec{b}_2 = 0$, $\vec{c}_1 = 0$, $A_{11} = 0$, $\vec{c}_2 = \vec{c}$, $A_{12} = A$, $\vec{b}_1 = \vec{b} \Rightarrow (1) - (2)$

Упр. Попустить (3)-(5) как ч.с. (6)-(9)

Теорема двойственности

ЗЛП (6)-(9) имеет р-е $\Leftrightarrow$ имеет решение ЗЛП:

$$\vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 \rightarrow \min \quad (10)$$

$$A_{11}^* \vec{u}_1 + A_{12}^* \vec{u}_2 \geq \vec{c}_1 \quad (11)$$

$$A_{12}^* \vec{u}_1 + A_{22}^* \vec{u}_2 = \vec{c}_2 \quad (12)$$

$$\vec{u}_1 \geq 0 \quad (13)$$

Примечание: если р-е ЗЛП (6)-(9) и ЗЛП (10)-(13) $\exists$, то они-е эквивалентны функционала в этих задачах равны

Заметим, что ЗЛП (6)-(9) эквив-на след-й ЗЛП:

$$\vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 \rightarrow \max$$

$$A_{11} \vec{x}_1 + A_{12} \vec{x}_2 \leq \vec{b}_1$$

$$A_{21} \vec{x}_1 + A_{22} \vec{x}_2 \leq \vec{b}_2$$

$$-A_{21} \vec{x}_1 - A_{22} \vec{x}_2 \leq -\vec{b}_2$$

$$-\vec{x}_1 \leq 0$$

$$\vec{c} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2), \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_2}, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ -E & O \end{pmatrix} \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{x} \rightarrow \max \\ A\vec{x} \leq \vec{b} \end{cases}$$

$n_2 \times n_2$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & -A_{21}^* & -E \\ A_{12}^* & A_{22}^* & -A_{22}^* & O \end{pmatrix} \leftarrow n_2 \times n_1$$

$$\vec{u} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$$

$\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{n_2}$

(3)-(5) получили в гр. выше

$$\vec{b}_1 \vec{v}_1 + \vec{b}_2 \vec{v}_2 - \vec{b}_3 \vec{v}_3 \rightarrow \min$$

$$A_{11}^* \vec{v}_1 + A_{22}^* \vec{v}_2 - A_{21}^* \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{c}_1$$

$$A_{12}^* \vec{v}_1 + A_{22}^* \vec{v}_2 - A_{22}^* \vec{v}_3 = \vec{c}_2$$

$$\vec{v}_1 \geq 0, \vec{v}_2 \geq 0, \vec{v}_3 \geq 0, \vec{v}_4 \geq 0$$

Выразим $-\vec{v}_4$: $\vec{c}_1 = A_{11}^* \vec{v}_1 - A_{22}^* \vec{v}_2 + A_{21}^* \vec{v}_3 - \vec{v}_4$

Значит $\vec{u}_1 = \vec{v}_1, \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$

Перепишем:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 \rightarrow \min (10) \\ A_{11}^* \vec{u}_1 + A_{12}^* \vec{u}_2 \geq \vec{c}_1 (11) \\ A_{21}^* \vec{u}_1 + A_{22}^* \vec{u}_2 = \vec{c}_2 (12) \\ u_1 \geq 0 (13) \end{cases} \quad \text{где } A_{ij}^* = A_{ij} - A_{i3}$$

• мин-во стр-й несовм
• двойств-н неопр-н

если макс-я ЗЛП не имеет р-я $\Rightarrow$ дв-я не имеет р-я

Умб

Предположение 1.

Если $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ удовле-т (7)-(9), т.е. дв-я доп-ств-н
прямой з-и, а $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ удовлетворяет (11)-(13),
то $\vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 \geq \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2$

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 &\geq (u_1, A_{11} \vec{x}_1 + A_{12} \vec{x}_2) + (A_{21} \vec{x}_1 + A_{22} \vec{x}_2, u_2) = \\ &= (\vec{x}_1, A_{11}^* \vec{u}_1 + A_{21}^* \vec{u}_2) + (\vec{x}_2, A_{12}^* \vec{u}_1 + A_{22}^* \vec{u}_2) \geq \\ &\stackrel{(11)}{\geq} (\vec{x}_1, \vec{c}_1) + (\vec{x}_2, \vec{c}_2) = \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Следствие.

Если $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ удовлетворяет (7)-(9), а $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ удовле-т
(11)-(13) и $\vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 = \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2$, то $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
р-е (6)-(9) и $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ р-е (10)-(13)

$$\begin{aligned} &\exists (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ удовле. (7)-(9). Значит, } \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 = \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 \\ &\geq \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Критерий опт-и в форме условий зон-и
несовместности.

Если $(\vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяет (7)-(9), а $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ удовлет-
(11)-(13). Для того, чтобы $(\vec{x}, \vec{y})$ была оптималь-
ным решением ЗЛП (6)-(9) и $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ре-
шением ЗЛП (10)-(13) $\Leftrightarrow$ ^{век-б уел. зон. несов-ти} $(\vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2) = 0$, ⁽¹⁴⁾
 $(\vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^*\vec{u}_1 - A_{12}^*\vec{u}_2) = 0$ (15)
^{в как-б гв. з-и получ-ли}
Упр: (10)-(13) $\cdot (-1) \Rightarrow$ век-я (6)-(9)

Функция Лагранжа (для (6)-(9)) $x_i \geq 0, u_i \geq 0$ ^{! счит-ть 3-й шаг}
 $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 + (\vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2) +$
 $+ (\vec{u}_2, \vec{b}_2 - A_{21}\vec{x}_1 - A_{22}\vec{x}_2) \stackrel{!}{=} \vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 + (\vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^*\vec{u}_1 -$
 $- A_{21}^*\vec{u}_2) + (\vec{x}_2, \vec{c}_2 - A_{12}^*\vec{u}_1 - A_{22}^*\vec{u}_2) \Leftrightarrow$

§ 2 Экономическая интерпретация двойственной
программы: трудовая теория оптимальности
или критерия

Пример 1.

Котонильная экономика.

(стат. и в Леонтьева)

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}$$

Предп-и, что A - прог. и-ца

$$\vec{x} \geq 0, \vec{w} \geq 0$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ - вектор трудоемкостей

$\vec{c}\vec{x}$ - спрос на труд

$\vec{w}$ - предложение труда

$\vec{c}\vec{x} \leq R$ - ресур-е оп-е

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ - вектор "мировых" цен

$\vec{p}\vec{w}$ - стоимость в "мировых" цен векторов
конечных выкусов $\vec{w}$

$$\vec{p}\vec{w} \rightarrow \max$$

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R$$

$$\vec{x} \geq 0, \vec{w} \geq 0$$

Лекция 7

Пример 1. Колониальная экономика.

$\vec{\pi}, \vec{w} \rightarrow \max$ в-р внеш. экпор. цен

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{w} \quad \text{в-р вал. внут. стр.}$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R \quad \text{в-р кон-х}$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R \quad \text{вектор труд. и общ. р-с}$$

$$\vec{p} \geq \vec{\pi} \quad \text{в-р цен на произв. в-с-е говяд}$$

$$s \geq 0 \quad \text{ставка з. и.}$$

$$\vec{x} \geq 0, \vec{w} \geq 0$$

$$x = (E - A)^{-1} \vec{w}$$

Составим ф-ю Лагранжа:

$$L(\vec{x}, \vec{w}, \vec{p}, s) = \vec{\pi} \vec{w} + (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \vec{w}) + s(R - \vec{c}\vec{x}) =$$

$$= sR + (\vec{x}, \vec{p} - A^* \vec{p} - s\vec{c}) + (\vec{w}, \vec{\pi} - \vec{p})$$

Об. задача:

$$\begin{cases} sR \rightarrow \min \\ \vec{p} = A^* \vec{p} + s\vec{c} \\ \vec{p} \geq \vec{\pi} \\ s \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{основные соот-е} \\ \text{теории} \\ \text{стоимости} \end{cases}$$

$$\vec{\pi} \vec{w} = sR \quad (1)$$

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0 \quad (2)$$

$$(\vec{w}, \vec{\pi} - \vec{p}) = 0 \quad (3) \quad \vec{w}_i > 0 \Rightarrow \vec{\pi}_i = \vec{p}_i$$

Теорема Канторовича:

$\vec{p}$ - вектор цен

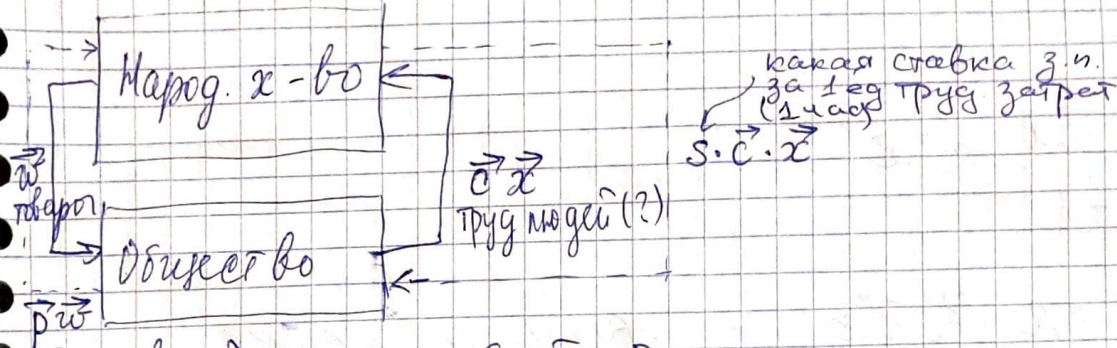
s - ставка заработной платы

$$\vec{p} = s(E - A^*)^{-1} \vec{c} = s \hat{\vec{c}} \quad \leftarrow \text{осн.-е соот-е труд. т-и стоим-и}$$

$$\hat{\vec{c}} = (E - A^*)^{-1} \vec{c} \stackrel{T.2}{=} \vec{c} + A^* \vec{c} + (A^*)^2 \vec{c} + \dots$$

$\hat{\vec{c}}$ - вектор полных трудоемкостей (труд затрат)

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{[\hat{\vec{c}}]_i}{[\hat{\vec{c}}]_j}$$



Основной финансовый баланс:

$$\vec{p} \vec{w} \stackrel{(1)}{=} \vec{\pi} \vec{w} \stackrel{(2)}{=} s R \stackrel{(3)}{=} s \vec{c} \vec{x} \quad \text{для н.х/в}$$

Баланс доходов, расходов населения

Подставим в $\vec{p}$:

$$s \vec{c} \geq \vec{\pi} \Leftrightarrow s \geq \left[\frac{\pi_i}{c_i} \right]_i \quad i = \overline{1, n} \quad s = \max_i \frac{\pi_i}{c_i} \quad \begin{matrix} \text{экон-и об-я} \\ \text{ставка з.н.} \end{matrix}$$

Пример 2. Фондустриальной капитализм

$U(\vec{w})$ — функция полезности

$$U(\vec{w}) = \min_i \frac{w_i}{k_i}$$

$\vec{k} = (k_1, k_2) > 0$ — структура потребления

$\vec{w} \rightarrow \max$

$$\vec{x} = A \vec{x} + \vec{w}$$

$$\vec{c} \vec{x} \leq R$$

$$\vec{w} \geq w \vec{k}$$

$$w \geq 0$$

иск-и $\vec{w}$

$$\begin{cases} \vec{\pi} \vec{w} \rightarrow \max \\ \vec{x} - A \vec{x} \geq w \vec{k} \quad \{ \vec{p} \geq 0 \\ \vec{c} \vec{x} \leq R \quad \{ s \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Ф-я Лагранжа:

$$L(\vec{x}, w, \vec{p}, s) = \vec{\pi} \vec{w} + (\vec{p}, \vec{x} - A \vec{x} - w \vec{k}) + s(R - \vec{c} \vec{x}) =$$

$$= s R + (\vec{x}, \vec{p} - A^* \vec{p} - s \vec{c}) + w(\vec{\pi} - \vec{p} \vec{k})$$

$$s R \rightarrow \min$$

$$\vec{p} = A^* \vec{p} + s \vec{c}$$

$$\vec{p} \vec{k} \geq \vec{\pi}$$

$$\vec{p} \geq 0, s \geq 0$$

абгачи.

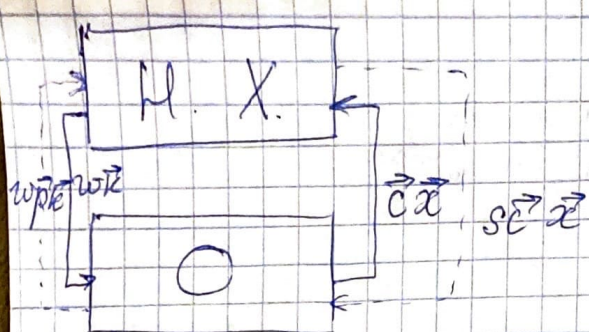
$$\vec{\pi} \vec{w} = s R \quad (1')$$

$$s(\vec{c} \vec{x} - R) = 0 \quad (2')$$

$$(\vec{p}, \vec{x} - A \vec{x} - w \vec{k}) = 0$$

ус-я доп-е нест-и

$L_w(\vec{x}, w, \vec{p}, s) = 0 \quad (3')$ — усл-е доп-и нест-и



$$w p k \stackrel{(3)}{=} \pi w \stackrel{(1)}{=} s R \stackrel{(2)}{=} s c x \quad \text{--- фун-я баланса}$$

Пример 3 Индустриализация

$$\pi w \rightarrow \max$$

$$x \geq A x + w k \quad \{ p \geq 0$$

$b = (b_1, \dots, b_n)$ - вектор капитальных ресурсов

$$c x \leq R \quad \{ s \geq 0$$

Φ - "капитал"

$$b x \leq \Phi \quad \{ r \geq 0$$

r - арендная плата за капитал

$$w \geq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, w, p, s, r) = & \pi w + (p, x - A x - w k) + s(R - c x) + \\ & + r(\Phi - b x) = s R + r \Phi + (x, p - A^* p - s c - r b) + \\ & + w(\pi - p k) \end{aligned}$$

Дв. з.:

$$s R + r \Phi \rightarrow \min$$

$$p = A^* p + s c + r b \quad (\Leftrightarrow)$$

$$p k \geq \pi$$

$$s \geq 0, r \geq 0, p \neq 0$$

$$\pi w = s R + r \Phi \quad (1'')$$

$$(p, x - A x - w k) = 0$$

$$s(R - c x) = 0 \quad (2)$$

$$w(\pi - p k) = 0 \quad (3')$$

$$r(\Phi - b x) = 0 \quad (4)$$

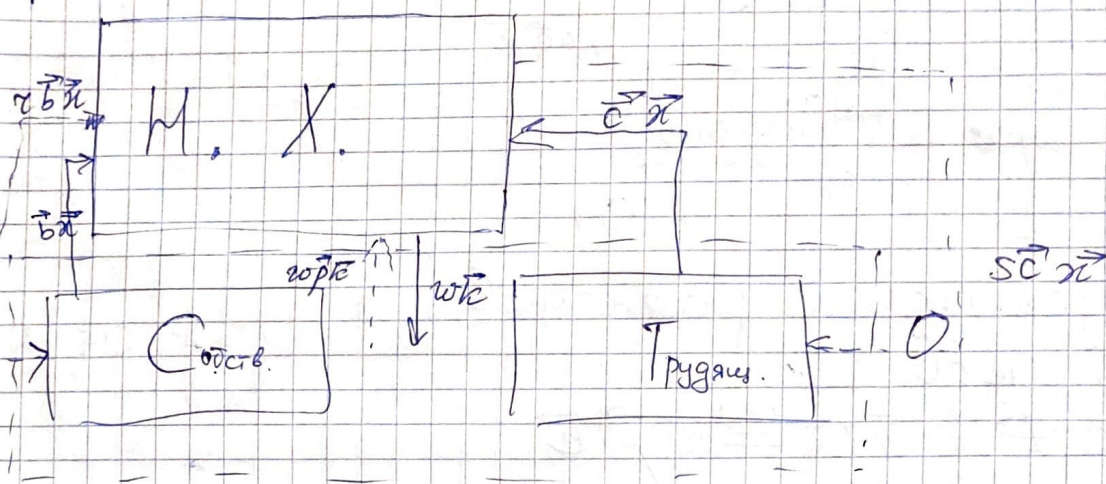
ус-я гон-й
непо-и

$$\Leftrightarrow p = s(E - A^*)^{-1} c + r(E - A^*)^{-1} b$$

$$\hat{c} = (E - A^*)^{-1} c$$

$$\hat{b} = (E - A^*)^{-1} b \quad \text{--- вектор полных трудоемкостей}$$

$$\vec{p} = s\vec{c} + r\vec{b}$$



Доход $\vec{p}$ М.Х.: $w\vec{p}\vec{k}$

$$w\vec{p}\vec{k} \stackrel{(2')}{=} \pi w \stackrel{(1'')}{=} sR + r\Phi \stackrel{(1')}{=} s\vec{c}\vec{x} + r\vec{b}\vec{x} - \text{фин. и балан.}$$

Пример 4. Уредустриальной капитализм

$$w \rightarrow \max$$

$$\vec{x} \geq A\vec{x} + w\vec{k} + R\vec{f} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \geq 0 \\ \vec{p} \neq 0 \end{array} \right. \text{в р. цен}$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R \quad \left\{ \begin{array}{l} s \geq 0 \\ s \neq 0 \end{array} \right. \text{единая ставка з.п.}$$

$$\vec{b}\vec{x} \leq \Phi \quad \left\{ \begin{array}{l} r \geq 0 \\ r \neq 0 \end{array} \right. \text{арендная плата}$$

$$w \geq 0, R \geq 0$$

$$L(\vec{x}, w, R, \vec{p}, s, r) = \pi w + (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - w\vec{k} - R\vec{f}) +$$

$$+ s(R - \vec{c}\vec{x}) + r(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = r\Phi + (\vec{x}, \vec{p} - A\vec{p} - s\vec{c} - r\vec{b}) +$$

$$+ w(\pi - \vec{p}\vec{k}) + R(s - \vec{p}\vec{f})$$

Дл. з.:

$$r\Phi \rightarrow \min$$

$$\vec{p} = A^*\vec{p} + s\vec{c} + r\vec{b}$$

$$\vec{p}\vec{k} \geq \pi$$

$$\vec{p}\vec{f} \geq s$$

$$s \geq 0, r \geq 0, \vec{p} \geq 0$$

$$\pi w = r\Phi \quad (1''')$$

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0 \quad (2)$$

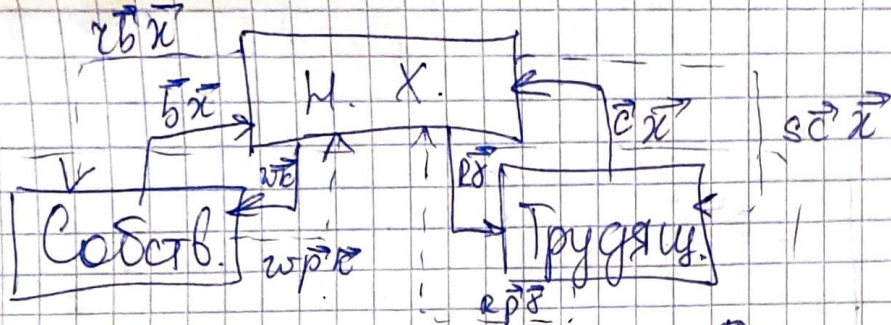
$$r(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = 0 \quad (3)$$

ус-я гон-и мем-и

$$(\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - w\vec{k} - R\vec{f}) = 0$$

$$w(\pi - \vec{p}\vec{k}) = 0 \quad (3')$$

$$R(s - \vec{p}\vec{f}) = 0 \quad (5)$$



Баланс доходов и расходов

Собственников:

$$\tau \vec{b} \stackrel{(1)}{=} \tau \Phi \stackrel{(2)}{=} \pi w \stackrel{(3)}{=} w \vec{r} \cdot \vec{c}$$

Трудящиеся:

$$s \vec{c} \stackrel{(4)}{=} s r \stackrel{(5)}{=} R \cdot \vec{p} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{p} = s \vec{c} + \tau \vec{b}$$

$$R > 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} s = \vec{p} \cdot \vec{r}$$

Подставим s в $\vec{p}$:

$$\vec{p} = (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{c} + \tau \vec{b}$$

$$s = s(\vec{c}, \vec{r}) + \tau(\vec{b}, \vec{r})$$

$$\tau = \frac{1 - (\vec{c}, \vec{r})}{(\vec{b}, \vec{r})} s$$

$$\vec{p} = s \left(\vec{c} + \frac{1 - (\vec{c}, \vec{r})}{(\vec{b}, \vec{r})} \vec{b} \right)$$

$$1 \geq (\vec{c}, \vec{r})$$

осн-е
отн-е
труд-н
теор-и
ст-и

Лекция 8.

Пример 5. "Некооперативная экономика"

$$\begin{cases} \vec{x} \geq A\vec{x} + \vec{w} + R\vec{\delta} \\ \vec{p} \geq 0 \end{cases} \quad w - \text{сальдо (произв.-го знака)}$$

$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \leq R \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{b}\vec{x} \leq \Phi \\ \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} \geq 0, R \geq 0$$

$$\vec{\pi}\vec{w} \rightarrow \max$$

Ф-я Л.:

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{w}, R, \vec{p}, s, \tau) &= \vec{\pi}\vec{w} + (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \vec{w} - R\vec{\delta}) + \\ &+ s(R - \vec{c}\vec{x}) + \tau(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = \tau\Phi + (\vec{x}, \vec{p} - A^*\vec{p} - s\vec{c} - \tau\vec{b}) + \\ &+ (\vec{w}, \vec{\pi} - \vec{p}) + R(s - \vec{p}\vec{\delta}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau\Phi \rightarrow \min \end{cases}$$

$$\vec{p} \leq A^*\vec{p} + s\vec{c} + \tau\vec{b}$$

$$\vec{p} = \vec{\pi} \quad \text{внут. цены совпали с внешн.}$$

$$\vec{p}\vec{\delta} \geq s$$

$$\vec{p} \geq 0, s \geq 0, \tau \geq 0$$

Из т-н гб-н:

$$\vec{\pi}\vec{w} = \tau\Phi$$

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0$$

$$\tau(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = 0$$

$$(\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \vec{w} - R\vec{\delta}) = 0$$

$$(\vec{x}, \vec{p} - A^*\vec{p} - s\vec{c} - \tau\vec{b}) = 0$$

$$R(s - \vec{p}\vec{\delta}) = 0 \quad (6)$$

Об.з.: (замена $\vec{p}$ на $\vec{\pi}$)

$$\tau\Phi \rightarrow \min$$

$$\vec{\pi} \leq A^*\vec{\pi} + s\vec{c} + \tau\vec{b}$$

$$\vec{\pi}\vec{\delta} \geq s$$

$$\vec{\pi} \geq 0, s \geq 0, \tau \geq 0$$

В условиях экономической продукт-и: $R > 0$

$$\Rightarrow \vec{p} \vec{f} = s \Rightarrow s = \vec{\pi} \cdot \vec{f}$$

Под-и вар-е гл-я s в гв.

$$\vec{\pi} \leq A^* \vec{\pi} + (\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \vec{c} + \gamma \vec{b} \Rightarrow \gamma \geq \frac{\pi_i - [A^* \vec{\pi}]_i - (\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i}{b_i}$$

$i = 1, n$

$\frac{b_i}{\text{норме.}}$

$\frac{b_i}{\text{числ. гр-и г. д.}} \cdot \frac{(\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i}{\text{норме. хотя бы для одного } i}$

$\frac{(\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i}{\text{ус-е не выполн-е в г. д. инф-я и т. д.}}$

$$\text{T.o.: } \max_i (\pi_i - [A^* \vec{\pi}]_i - (\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i) \geq 0$$

$\underbrace{(\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i}_{\text{затраты на труд}}$

$\underbrace{\pi_i - [A^* \vec{\pi}]_i}_{\text{экономика и продукт-и}}$

$$\text{Если } x_i > 0, \text{ то } \gamma = \frac{\pi_i - [A^* \vec{\pi}]_i - (\vec{\pi} \cdot \vec{f}) \cdot c_i}{b_i}$$

Из теоремы двойственности св-ва цен и множеств Лангранжа.

У нас m экон. с-м, используем 3-й пример (индустриализация).

Считаем, что регион t оп-ся:

$$\begin{cases} \vec{x}(t) \geq A(t) \vec{x}(t) + w(t) \vec{k}(t) \\ \vec{b}(t) \cdot \vec{x}(t) \leq \Phi(t) \\ \sum_{t=1}^m \vec{c}(t) \cdot \vec{x}(t) \leq R \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p}(t) \geq 0 \\ \vec{r}(t) \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

A^k зав-т от решения $t=1, m$ (для каждой региональной эк-ки одно уравнение)

$$\begin{cases} w(t) \geq 0 \\ \sum_{t=1}^m \pi(t) w(t) \rightarrow \max \end{cases}$$

$\text{сн-б региона лаб-б на рас-е эк-е}$

$$\mathcal{L}(\{\vec{x}(t), w(t), \vec{p}(t), \gamma(t) | t=1, m, s\}) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{t=1}^m [\pi(t) w(t) + (\vec{p}(t), \vec{x}(t) - A(t) \vec{x}(t) - w(t) \vec{k}(t)) + \\ &+ \gamma(t) \cdot (\Phi(t) - \vec{b}(t) \cdot \vec{x}(t)) + s(R - \sum_{t=1}^m \vec{c}(t) \cdot \vec{x}(t))] = \\ &= sR + \sum_{t=1}^m \gamma(t) \Phi(t) + \sum_{t=1}^m \{(\vec{x}(t), \vec{p}(t) - A^*(t) \vec{p}(t) - \\ &- \gamma(t) \vec{b}(t) - s \vec{c}(t)) + w(t) \cdot (\pi(t) - \vec{p}(t) \cdot \vec{k}(t))\} \end{aligned}$$

$\text{привести к виду, как в гл-е 1.1}$

Зад. 3.:

$$SR + \sum_{t=1}^m \tau(t) \Phi(t) \rightarrow \min$$

$$\vec{p}(t) = A^*(t) \vec{p}(t) + \tau(t) \vec{b}(t) + s \vec{c}(t)$$

$$t = \overline{1, m}$$

$$t = \overline{1, m}$$

$$\vec{p}(t) \cdot \vec{k}(t) \geq \pi(t)$$

$$\tau(t) \geq 0, s \geq 0, \vec{p}(t) \geq 0$$

т.к. абг. м.
б.о.и. - с.я

$$(\vec{p}(t), \vec{x}(t) - A^*(t) \vec{x}(t) - w(t) \vec{k}(t)) = 0 \quad (3_t)$$

$$\tau(t) \cdot (\Phi(t) - \vec{b}(t) \cdot \vec{x}(t)) = 0 \quad (4_t)$$

$$s(R - \sum_{t=1}^m \vec{c}(t) \cdot \vec{x}(t)) = 0 \quad (5_t)$$

$$w(t) (\pi(t) - \vec{p}(t) \cdot \vec{k}(t)) = 0 \quad (6_t)$$

Предложение 2.

$\exists \{x^*(t), w^*(t) | t = \overline{1, m}\}$ - решение ЗЛП(1), а
 $\exists \{\vec{p}^*(t), \tau^*(t) | t = \overline{1, m}\}, s^*$ решение ЗЛП(2),
 $1 \leq \tau \leq m$. Тогда $(x^*(\tau), w^*(\tau))$ яв-я р-м ЗЛП

$$\pi(\tau) w(\tau) - s^* \vec{c}(\tau) \cdot \vec{x}(\tau) \rightarrow \max$$

$$\vec{x}(\tau) \geq A(\tau) \vec{x}(\tau) + w(\tau) \vec{k}(\tau) \quad \begin{cases} \vec{p}(\tau) \geq 0 \\ \tau(\tau) \geq 0 \end{cases}$$

$$\vec{b}(\tau) \cdot \vec{x}(\tau) \leq \Phi(\tau)$$

$$w(\tau) \geq 0$$

а $(\vec{p}(\tau), \tau(\tau))$ яв-я р-м ЗЛП(1)

$$\tau(\tau) \cdot \Phi(\tau) \rightarrow \min$$

$$\vec{p}(\tau) = A^*(\tau) \vec{p}(\tau) + \tau(\tau) \vec{b}(\tau) + s^* \vec{c}(\tau)$$

$$\vec{p}(\tau) \cdot \vec{k}(\tau) \geq \pi(\tau)$$

$$\tau(\tau) \geq 0, \vec{p}(\tau) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}(\tau), w(\tau), \vec{p}(\tau), \tau(\tau)) &= \pi(\tau) w(\tau) - s^* \vec{c}(\tau) \cdot \vec{x}(\tau) + \\ &+ (\vec{p}(\tau), \vec{x}(\tau) - A(\tau) \vec{x}(\tau) - w(\tau) \vec{k}(\tau)) + \tau(\tau) (\Phi(\tau) - \vec{b}(\tau) \cdot \vec{x}(\tau)) \\ &= \tau(\tau) \Phi(\tau) + (\vec{x}(\tau), \vec{p}(\tau) - A^* \vec{p}(\tau) - \tau(\tau) \vec{b}(\tau) - \\ &- s^* \vec{c}(\tau)) + w(\tau) (\pi(\tau) - \vec{p}(\tau) \cdot \vec{k}(\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists s \neq s^* & \begin{cases} s > s^* \Rightarrow \text{нарушение} \\ s < s^* \Rightarrow \text{нарушение} \end{cases} \sum_{i=1}^m \vec{c}_i / \vec{a}_i \leq R, (5) \end{aligned}$$

$\exists s^*$ угадано $\Rightarrow$ решили! (*) Будет ли набор p и p -м (1)?

§4. Оценка эффективности новых технологий
 n видов продуктов
 m технологий произв-ва ($m \neq n$)

$\vec{L}$ - матрица выпусков ($n \times m$)

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^* \geq 0$ - вектор интенсивности вып-ва новых технологий

$\vec{L}\vec{x}$ - вектор объемов производства

$A \geq 0$ - матрица прямых затрат ($n \times m$)

$A\vec{x}$ - производственные затраты

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_m)$ - вектор трудоемкостей

$\vec{c} \cdot \vec{x}$ - затраты труда, объем вып-ва техн-и

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ - вектор фондоемкостей

$\vec{L}\vec{x} \geq A\vec{x} + \vec{w}$ - в-р стр. потре-я

$\vec{c} \cdot \vec{x} \leq R$

$\vec{b} \cdot \vec{x} \leq \Phi$

(1)

$\vec{x} \geq 0, w \geq 0$

$(\vec{g}_n, \vec{a}_n, \vec{c}_n, b_n)$ - новая технология

опр-б: $\vec{g}$ Φ
 w Φ - капитал
 $\vec{g}w$ b_k
 k
 wk

Консультация

①

яв-я ли матриц. м-ца

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

а) продуктивной, б) неразложимой, в) уст. ?

С.ч. м-ца $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{0.99}$. Число Ф.-П. $\lambda_4 = \sqrt{0.99} - 1$

След-но, м-ца продуктивна

По опр-ю м-ца разложима ($T = \{3\}$)

Уст-я м-ца яв-я неразл.

Разложимая м-ца не м.б. уст-й!

Да, нет, нет

②

В терминах дв. задачи сформулировать с-я несов-и с-н

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ A_2 x + A_3 y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

матрица Фаркса

$$\begin{matrix} A_1^{m_1 \times n_1} & x^{n_1} & b^{m_1} \\ A_2^{m_2 \times n_1} & x^{n_1} & 0 \\ A_3^{m_3 \times n_2} & y^{n_2} & 0 \end{matrix}$$

С-я несовместна $\Rightarrow$ не имеет р-й ЗЛП: $\begin{cases} 0x + 0y \geq \max \\ A_1 x \leq b, y \geq 0 \\ A_2 x + A_3 y = 0, y \geq 0 \end{cases}$

ЗЛП может не иметь р-я по 2^м причинам:

- 1) мн-во оп-й задачи несовместно
- 2) функционал на мн-ве доп-х р-й (x, y) неогр-н ф-л

В нашем сл-е ф-л ограничен и с-я может не иметь р-й, если мн-во оп-й з-и несовместно

ЗЛП не имеет р-й $\Leftrightarrow$ когда не имеет р-й двойственная ЗЛП. Построим дв.з. Множество доп-жа $u_1 \geq 0, u_2$.

Составим ф-ю Лагранжа:

$$L(x, u_1, u_2) = (u_1, b - A_1 x) - (u_2, A_2 x + A_3 y) = b u_1 - (x, A_1^T u_1 + A_2^T u_2) + (y, A_3^T u_2)$$

Дв. з. ЛП:

$$b u_1 \rightarrow \min$$

$$A_1^T u_1 + A_2^T u_2 = 0 \quad \text{т.к. нет о-р-й на } x$$

$$A_3^T u_2 \geq 0 \quad \leftarrow \text{нер-во д.д. таковы, что при вкл-и}$$

$$u_1 \geq 0$$

Для того, чтобы о-ть ФЛ нужно взять ф-л и добавить ограничения с учетом правила знака

когда $u_1 \geq 0$, то в-р д.д. матрицу $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{если } u_1 \geq 0, \text{ то } \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \end{matrix}$
когда $=$, то в-р д.д. с $-$ $-$ $+$ $+$ $(u_1 = u_2 = 0)$

В дв. з. лин-во о-р-й совместно Тогда 2^й вариант функционал неогр-н

Лин-во о-р-й — конус

Если на какой-то паре ф-л в дв. з. принимает отриц. зн-е, то ф-л неогр-н

ЗЛП не имеет р-я, если несовместны о-р-я в з-е или на лин-ве доп-к р-й не о-р-н ф-л. О-р-я в двойств. з. совме-н (н-р $u_1 = 0, u_2 = 0$) удовл-т о-р-м.

Система (1) несовместна, если и только если совместна с-а:

$$b u_1 \leq -1$$

$$A_1^* u_1 + A_2^* u_2 = 0$$

$$A_3^* u_2 \geq 0$$

$$u_1 \geq 0$$

③ Найти число и вектор Фробениуса - Перрона матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

а) продуктивной; б) непродуктивной; в) устойчивой.

Характ. ур-е

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1/4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{4}-\lambda)(\lambda^2-4\lambda)=0$$

Реш: $\lambda_1=0, \lambda_2=\frac{1}{4}, \lambda_3=4 \Rightarrow$ Число Ф.-П.: $\lambda_A=4$
Вектор Ф.-П. находим как метрив-е-р-с-т

$$2x_1 + 2x_3 = 4x_1$$

$$\frac{1}{4}x_2 = 4x_2$$

$$2x_1 + 2x_3 = 4x_3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_A = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha > 0$$

Т.к. $\lambda_A \geq 1$, то матрица не продуктивна
т-а Ф.-П., критерии прод.-н

Матрица разложима $J=13$

След-но, неустойчива

а-б не; $\lambda_A=4, \vec{x}_A = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha > 0$

④

неотриц.

М-ца $A \geq 0$ ($n \times n$) и $(E+A)^n - E > 0$. Верно ли
это м-ца A неразложима?

Да, верно.

Всп-ся ф-я Бинома Ньютона. Разложим $(E+A)^n$ по
Б.Н. Получим, что это сумма степеней м-цы

А, указав на полож-е коэф-т степеней $1, 2, \dots$
 Есть критерий:
 Ч пары $(i, j) \exists t \in \mathbb{N} : A^t = (a_{ij})^t > 0$, то м-ца перем.

Тогда, если сумма этих м-ц оказалась полож., то в $i^{\text{й}}$ строке, $j^{\text{й}}$ столбце этой суммы стоит положительный эл-т а раз так, то означает полож-й эл-т в $i^{\text{й}}$ стр. $j^{\text{й}}$ ст-це u_1 из степеней либо $1^{\text{й}}$, либо $2^{\text{й}}$, либо $3^{\text{й}}$

⑤ Построить дв. з. к ЗЛП:

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\ & 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 6x_4 \geq 9 \quad \wedge u_1 \leq 0 \\ & -x_2 + 3x_4 - 7x_3 \leq 8 \quad \wedge u_2 \geq 0 \\ & 4x_1 + 8x_4 - 7x_2 + 3x_3 = 10 \quad \wedge u_3 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{На конце } u_1 \geq 0, \\ \text{поэтому} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & x_1 \leq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0 \\ & \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}) = (x_1 + 2x_3 + 3x_4) + (u_1, 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 6x_4 - 9) - \\ & - (u_2, -x_2 + 3x_4 - 7x_3 - 8) - (u_3, 4x_1 + 8x_4 - 7x_2 + 3x_3 - 10) = \\ & = 9u_1 + 8u_2 + 10u_3 + (x_1, 1 - 4u_1 - 4u_3) + (x_2, -5u_1 + u_2 + 7u_3) + \\ & + (x_3, 2 - 8u_1 + 7u_2 - 3u_3) + (x_4, 3 + 6u_1 - 3u_2 - 8u_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 9u_1 + 8u_2 + 10u_3 \rightarrow \min \\ -4u_1 - 4u_3 \geq -1 \\ -5u_1 + u_2 + 7u_3 = 0 \\ -8u_1 + 7u_2 - 3u_3 \leq -2 \\ 6u_1 - 3u_2 - 8u_3 \geq -3 \\ u_1 \leq 0, u_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---||---} \\ 4u_1 + 4u_3 \leq 1 \\ 5u_1 - u_2 - 7u_3 = 0 \\ 8u_1 - 7u_2 + 3u_3 \geq 2 \\ -6u_1 + 3u_2 + 8u_3 \leq 3 \\ u_1 \leq 0, u_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Максимизация:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} L(\dots) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \underbrace{u_1}_{\geq 0} [4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 9] - \\ &- \underbrace{u_2}_{\geq 0} [-x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 8] - \underbrace{u_3}_{\geq 0} [4x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 10] = \\ &= -9u_1 + 8u_2 + 10u_3 + \underbrace{x_1}_{\geq 0} [1 + 4u_1 - 4u_2] + \underbrace{x_2}_{\geq 0} [5u_1 + u_2 + 7u_3] + \\ &+ \underbrace{x_3}_{\geq 0} [2 + 8u_1 + 7u_2 - 3u_3] + \underbrace{x_4}_{\geq 0} [3 - 6u_1 - 3u_2 - 8u_3] \end{aligned}$$

Дл. 3.:

$$-9u_1 + 8u_2 + 10u_3 \rightarrow \min$$

$$-4u_1 + 4u_3 \leq 1$$

$$5u_1 + u_2 + 7u_3 = 0$$

$$-8u_1 - 7u_2 + 3u_3 \geq 2$$

$$6u_1 + 3u_2 + 8u_3 \leq 3$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$